I VETTORI

Definizione
Sistemi di riferimento
Componenti e modulo
Somma e differenza
Prodotto scalare
Prodotto vettoriale
Versori

Grandezze scalari e vettoriali

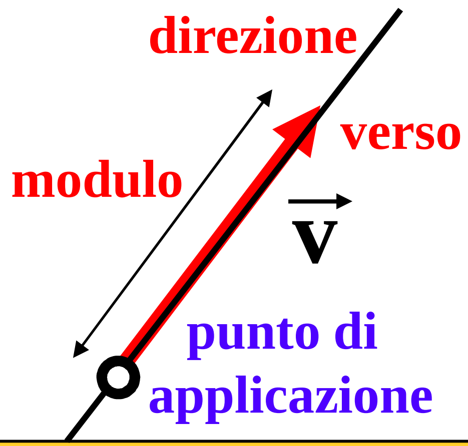
Per una **descrizione completa** del fenomeno sono **necessari e sufficienti**

Grandezze scalari

1 informazione:

- *modulo = numero (risultato misura)*

Es. Massa = 10 kg



Grandezze vettoriali

4 informazioni:

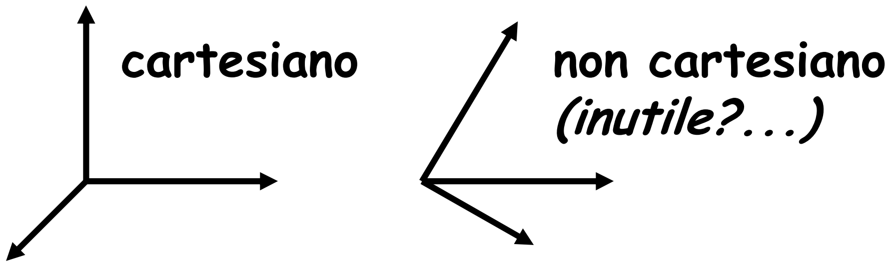
- *modulo = numero (risultato misura)*
- *direzione*
- *verso*
- *punto di applicazione*

Es. Spostamento = 10 km
in direzione nord-sud
verso nord
partendo da Siena

Sistemi di riferimento

Criterio generale: semplicità (= minor complicazione possibile!)

Sistemi cartesiani: assi x,y,z tra loro perpendicolari



Quale sistema di riferimento usare?

Dipende dalle caratteristiche **geometriche** e di **simmetria** del problema.

Es.

automobile, bicicletta
peso che cade
scatola cubica
fascio raggi X
...

coord. cartesiane

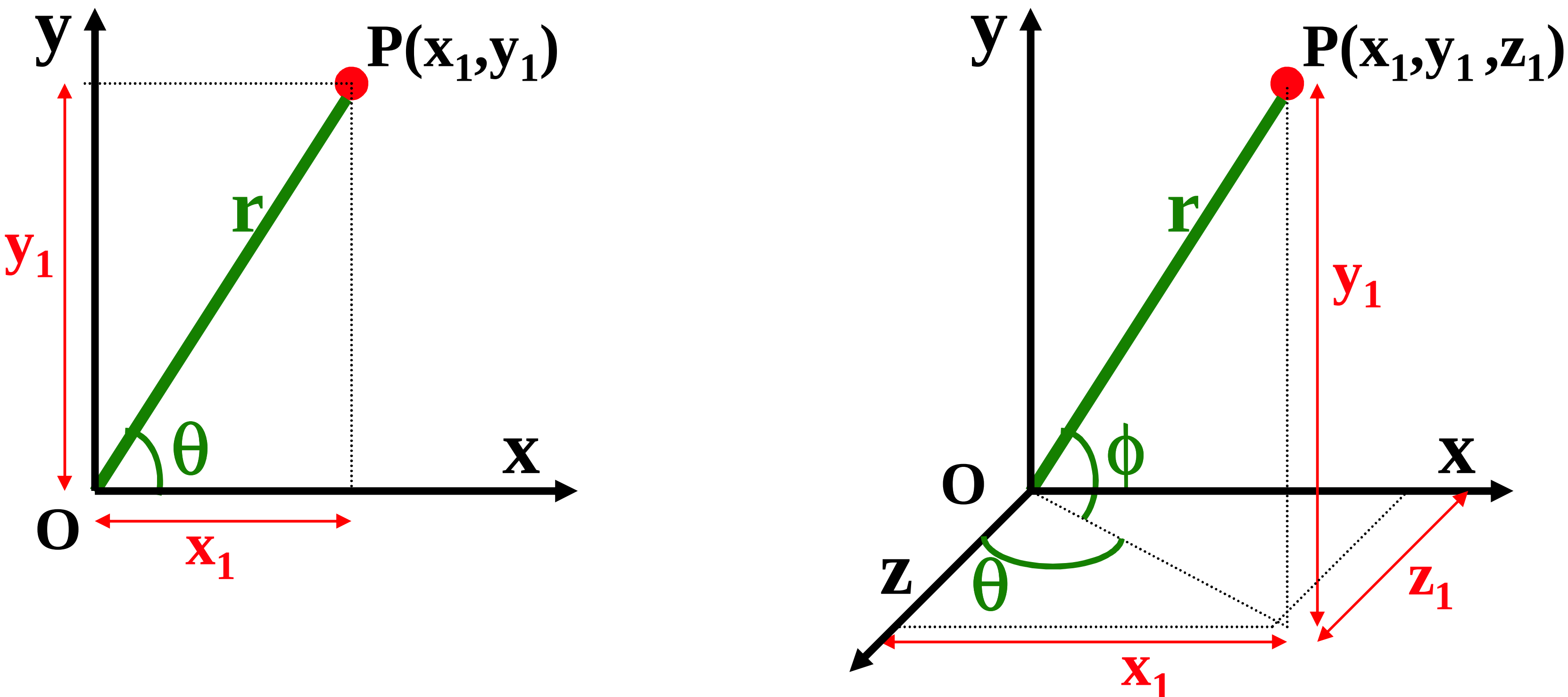
ruota, palla
giostra
Terra, Sole, pianeti
onde elettromagnetiche
atomi, cellule
...

coord. sferiche

tubi, impianti idraulici
condotti elettrici
vasi sanguigni
bottiglie, bombole
siringhe, fiale, flebo

coord. cilindriche

Sistemi di riferimento a 2 e 3 dimensioni



Ogni punto è univocamente determinato da:

in 2 dim → 2 coordinate

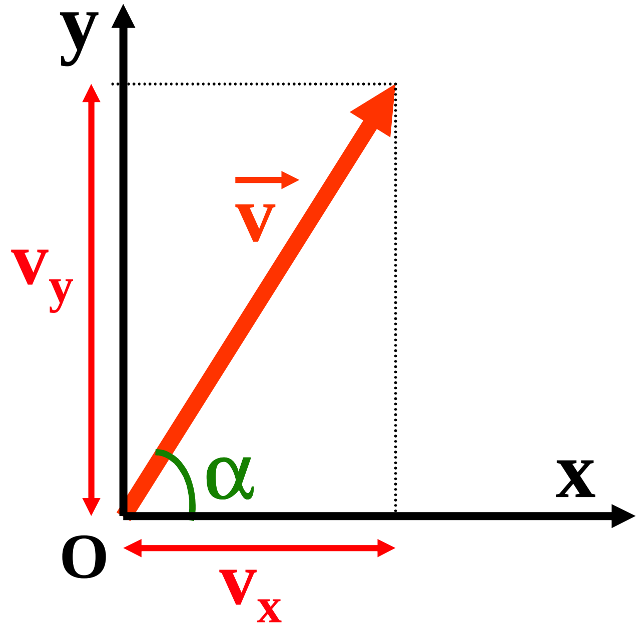
P(x,y) o P(r,θ)

in 3 dim → 3 coordinate

P(x,y,z) o P(r,θ,ϕ)

Vettori: componenti e modulo

Un vettore è univocamente descritto
nel piano 2dim dalle sue 2 componenti
nello spazio 3dim dalle sue 3 componenti

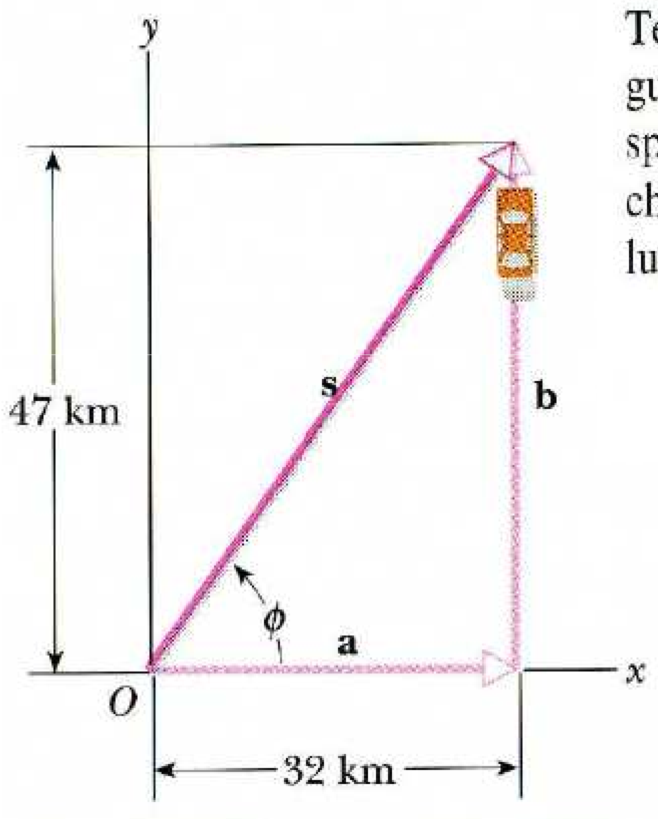


$$v_x = |\vec{v}| \cdot \cos(\alpha)$$
$$v_y = |\vec{v}| \cdot \text{sen}(\alpha)$$

$$|\vec{v}|^2 = v_x^2 + v_y^2$$ modulo

$$= |\vec{v}|^2 \cdot [\text{sen}^2(\alpha) + \cos^2(\alpha)] = |\vec{v}|^2 \cdot 1$$

Problema 2 Un'automobile viaggia verso est per 32 km. Quindi, prima di fermarsi, verso nord per altri 47 km. Determinare lo spostamento risultante.

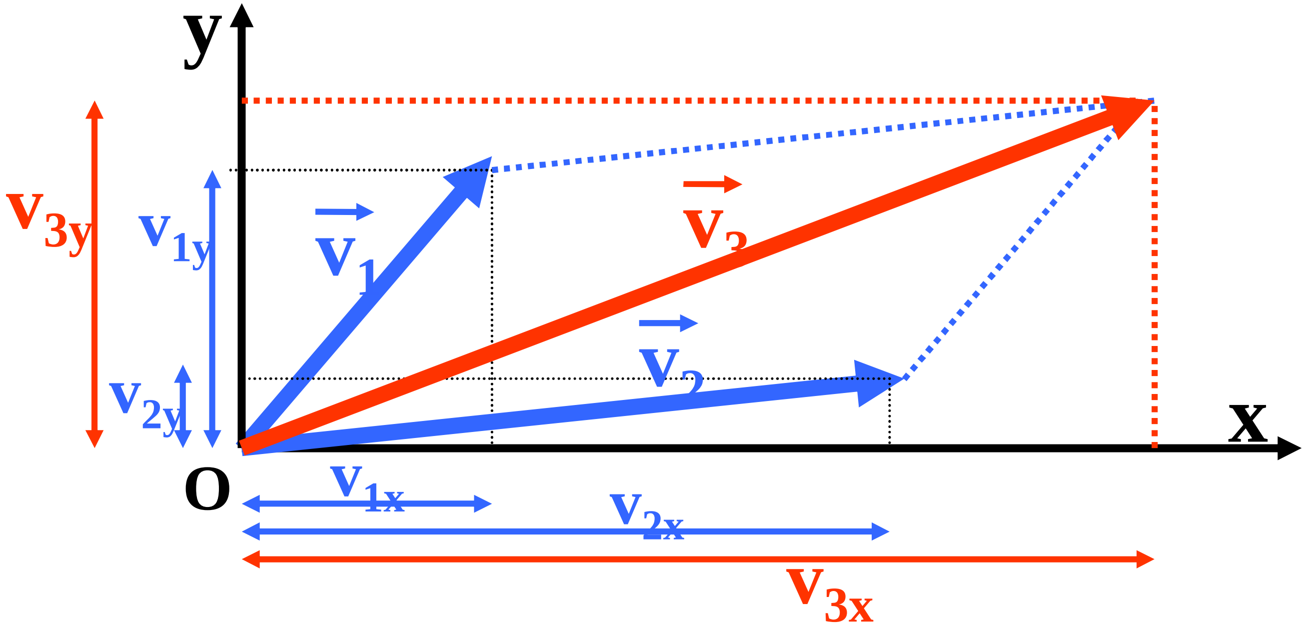


Soluzione Scegliamo un sistema di coordinate fisso rispetto alla Terra con l'asse x diretto verso est e l'asse y verso nord. Nella figura sono stati indicati i due successivi spostamenti **a** e **b**. Lo spostamento risultante **s** è ottenuto dalla somma **s** = **a** + **b**. Poiché **b** non ha componente lungo l'asse x e **a** non ha componente lungo l'asse y, otteniamo:

$$s_x = a_x + b_x = 32 \text{ km} + 0 = 32 \text{ km},$$

$$s_y = a_y + b_y = 0 + 47 \text{ km} = 47 \text{ km}.$$

Somma di vettori



$$\vec{v}_3 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$$

Metodo grafico:

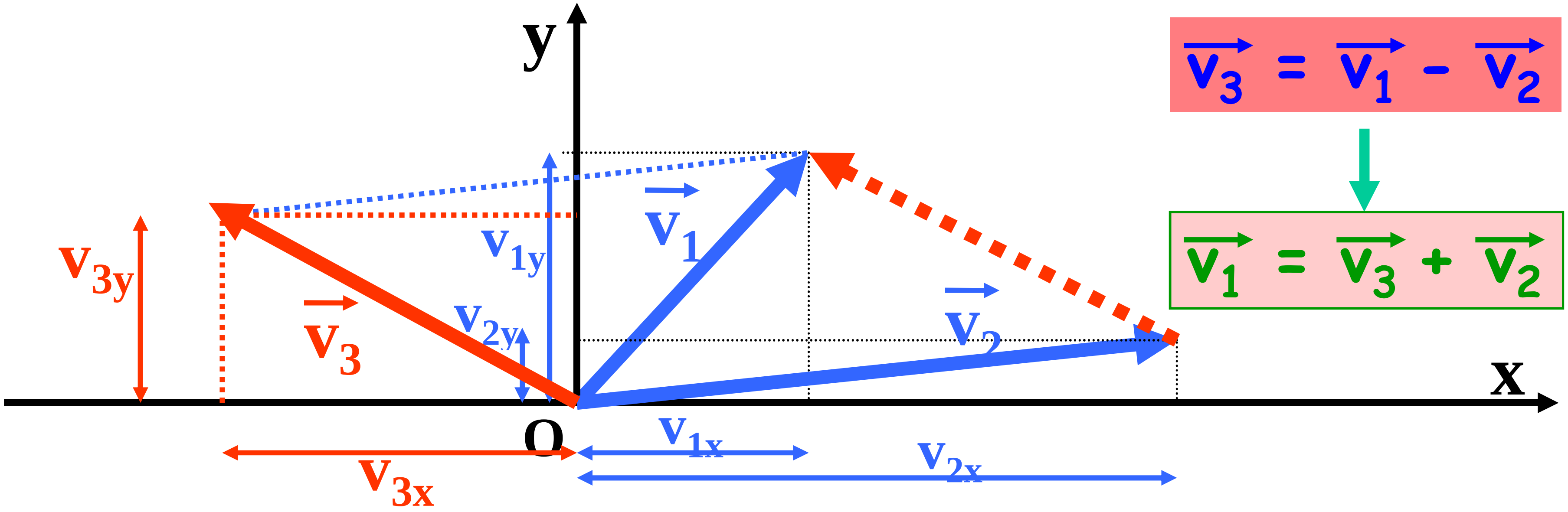
diagonale del parallelogrammo costruito sui vettori di partenza

Componenti:

somma delle componenti dei vettori di partenza

$$v_{3x} = v_{1x} + v_{2x}$$
$$v_{3y} = v_{1y} + v_{2y}$$

Differenza di vettori



$$\vec{v}_3 = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$$

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_3 + \vec{v}_2$$

Metodo grafico:

"altra" diagonale del parallelogrammo costruito sui vettori di partenza

Componenti:

differenza delle componenti dei vettori di partenza

$$v_{3x} = v_{1x} - v_{2x}$$
$$v_{3y} = v_{1y} - v_{2y}$$

"Moltiplicazioni" di vettori

Oltre alla somma e alla differenza
si possono definire 2 altre operazioni tra vettori
chiamate "prodotti", ma non corrispondono
alla consueta idea di moltiplicazione.

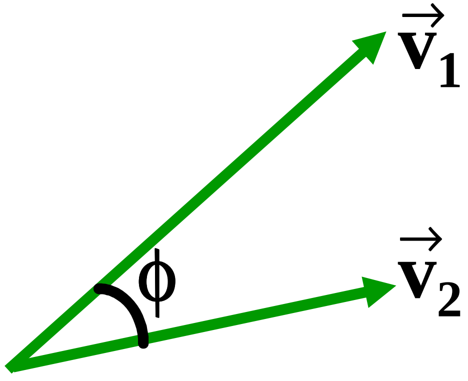
Prodotto scalare di 2 vettori:
il risultato è uno scalare, non più un vettore

Prodotto vettoriale di 2 vettori:
il risultato è ancora un vettore

Inciso:

Un vettore può anche essere moltiplicato per uno scalare.
Il vettore risultante ha stessa direzione; modulo pari al prodotto dei moduli dello scalare e del vettore di partenza; il verso dipende dal segno dello scalare: stesso (opposto) se positivo (negativo).

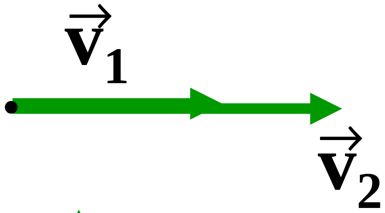
Prodotto scalare



$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = v_1 \, v_2 \, \cos\phi$$

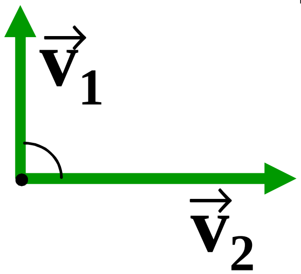
$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = v_{1x} \, v_{2x} + v_{1y} \, v_{2y}$$

$\phi = 0°$



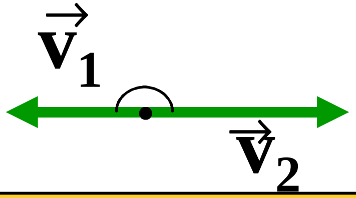
- $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = v_1 v_2 \underbrace{\cos\phi}_{+1} = v_1 v_2$

$\phi = 90°$



- $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = v_1 v_2 \underbrace{\cos\phi}_{0} = 0$

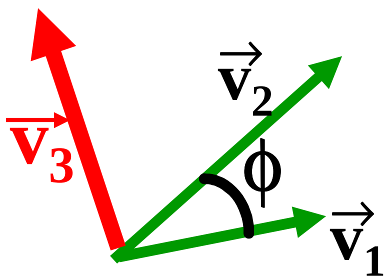
$\phi = 180°$

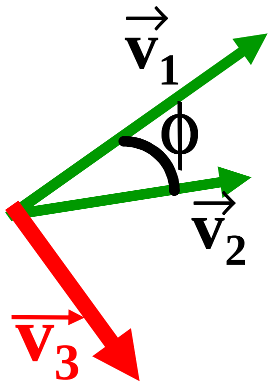


- $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = v_1 v_2 \underbrace{\cos\phi}_{-1} = - v_1 v_2$

il risultato
è un numero,
non un vettore!

Prodotto vettoriale





$$|\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2| = v_1\, v_2\ \mathrm{sen}\, \phi$$

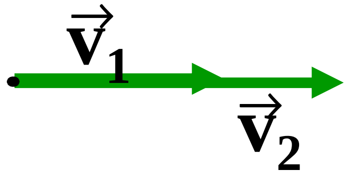
direzione $\perp$ ai 2 vettori

verso di avanzamento di una vite

sovrapponendo v_1 a v_2 (e non viceversa!)

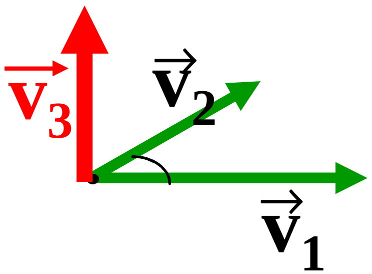
(pollice mano destra)

$\phi = 0°$



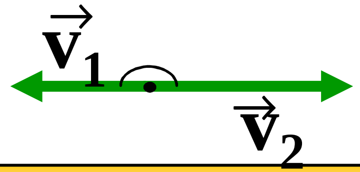
• $|\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2| = v_1 v_2 \underbrace{\mathrm{sen}\, \phi}_{0} = 0$

$\phi = 90°$



• $|\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2| = v_1 v_2 \underbrace{\mathrm{sen}\, \phi}_{+1} = v_1 v_2$

$\phi = 180°$



• $|\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2| = v_1 v_2 \underbrace{\mathrm{sen}\, \phi}_{0} = 0$

il risultato
è un vettore,
non un numero!

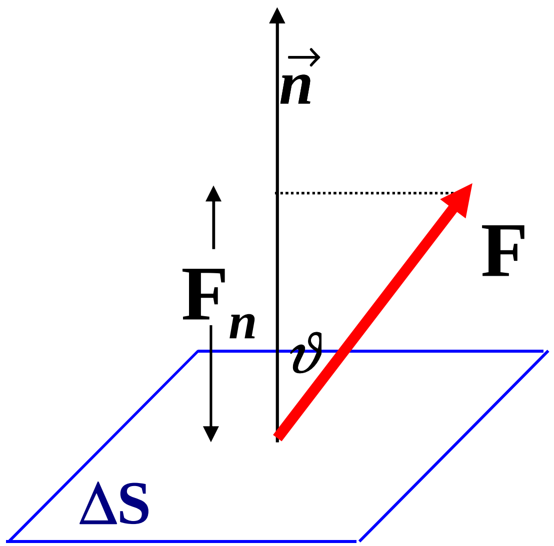
Versori

$$\vec{n} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

modulo = 1

direzione $\vec{v}$

verso $\vec{v}$



Def. di pressione:

Es.

componente di una forza perpendicolare a una superficie

$F_n = F \cos\vartheta = \vec{F} \bullet \vec{n}$ **(prodotto scalare)**

E' un metodo comodo per tener conto di una direzione precisa senza alterare – grazie al modulo unitario del versore – il valore numerico della grandezza in esame.
Es.: vettore velocità nel moto circolare uniforme.

Esercizi

E1)
Dati i tre vettori **a** = (0, 3.5, 0.7) m, **b** = (1.2, -5, -4) m, **c** = (4, 3, 1) m, trovare il loro vettore somma **d** = **a** + **b** + **c** e il vettore **e** = **a** – **c**.

E2)
Trovare l'angolo compreso tra i vettori **a** = (0, 3 ,4) e **b** = (1, $\sqrt{6}$, 3).

E3)
Dato il vettore **a** = (5, 2, 1) e un vettore **b** = (3, 4 , z) con terza componente z incognita, trovare il valore di z affinché il prodotto scalare **c** = **a**·**b** sia uguale a 25.

E4)
Dati due vettori **a** e **b** di modulo a = 4 e b = 7, quale è l'angolo che devono formare perché il loro prodotto scalare sia **a**·**b** = 5 ?